التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الاتية: $11x-5y=2$............(E)

1) أ – برهن أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

ب – استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعي غير معدوم ، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ب- عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$.

ت- استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما .

3) أ -أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 10 .

ب- استنتج رقم احاد العدد 7^{2014}.

ت- عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $7^{y-2x}\equiv 9[10]$.

التمرين الثاني:

مسابقة إمتحان شفهي تنظم بحيث يسحب المترشح عشوائيا 3 مواضيع من مجموع 80 موضوعا ويجب على المترشح أن يجيب على موضوع على الأقل من بين المواضيع الثلاثة المسحوبة .

1. ما هو عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا .
2. يتقدم مرشح لهذا الامتحان ولم يدرس سوى 50 موضوع من بين 80 ما إحتال أن :
   A. " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "
   B. " يجيب المترشح على موضوعين فقط "
   C. يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "
   D. لا يجيب المترشح على أي موضوع "
3. ما هو عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99

Nafouz

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$.

3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ إن كانت الإجابة نعم عين نهايتها .

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=6$.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{2^n}{3+2^{n+1}}$

ت- أحسب $\lim u_n$ و أحسب S_n المجموع بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+........+\frac{1}{u_n}$

التمرين الرابع :

i. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-3x-4$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2\prec\alpha\prec 2,3$

3) استنتج إشارة $g(x)$.

ii. f دالة عددية معرفة على $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين الاعداد الحقيقية a و b و c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=ax+b\frac{cx+d}{x^2-1}$

2) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة

3) احسب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة مستنتجا معادلات المستقيمات المقاربة .

4) بين ان $(\Delta): y=x+2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

5) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x+2$.

التمرين الأول:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الاتية: (E)............$11x-5y=2$

1) أ – البرهان أن إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$.

لدينا (E) تكافئ $-5y\equiv 2[11]$ ومنه $6y\equiv 2[11]$ إذن $2\times 6y\equiv 2\times 2[11]$ ومنه $y\equiv 4[11]$

ب – استنتاج حلول المعادلة (E).

مما سبق لدينا $y\equiv 4[11]$ ومنه $y=11k+4$ ، بالتعويض في المعادلة (E) نجد $x=5k+2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x;y)$ حيث : $\begin{cases} x=5k+2 \\ y=11k+4 \end{cases}$ حيث k عدد صحيح .

2) ليكن n عددا طبيعي غير معدوم ، نضع $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

نفرض أن $PGCD(a;b)=d$ إذن d يقسم a و d يقسم b ومنه d يقسم $11a-5b$ نستنتج أن d يقسم 2

إذن $d\in\{1;2\}$.

ب- تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$.

لدينا $PGCD(a;b)=2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b ومنه 2 يقسم $b-2a$ إذن 2 يقسم $(11n+4)-2(5n+2)$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبيعي زوجي)

ت- استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما :

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a;b)=1$ وهذ يكافئ $PGCD(a;b)\neq 2$ ومنه قيم n المطلوبة

هي $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}^*$ (أي n عدد طبيعي فردي)

3) أ - دراسة حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 10 .

$$7^0 \equiv 1[10]$$
$$7^1 \equiv 7[10]$$
$$7^2 \equiv 9[10]$$
$$7^3 \equiv 3[10]$$
$$7^4 \equiv 1[10]$$

ومنه نلخص النتائج في الجدول التالي :

قيم n	$4k'$	$4k'+1$	$4k'+2$	$4k'+3$
البواقي	1	7	9	**3**

ب- استنتاج رقم احاد العدد 7^{2014}.

رقم احاد العد هو باقي قسمته على 10 و لدينا $2014 = 4\times503+2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل $4k'+2$
إذن حسب الجواب السابق رقم احاد العدد هو 9

ت- تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول المعادلة (E) وتحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$.

لدينا $7^{y-2x} = 7^{11k'+4-10k'-4} = 7^{k'}$ و منه $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه : $k' = 4\lambda+2$ ومنه :

$$\begin{cases} x = 5(4\lambda+2)+2 = 20\lambda+12 \\ y = 11(4\lambda+2)+4 = 44\lambda+26 \quad /(k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

التمرين الثاني:

1. **ايجاد عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا هو** $C_{80}^3 = 82160$
2. **حساب إحتمال كل من :**

A. " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "

$$P(A) = \frac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \frac{19600}{82160} = \frac{245}{1027} \approx 0,24$$

B. " يجيب المترشح على موضوعين فقط "

$$P(B) = \frac{C_{50}^2\times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{3675}{8216} \approx 0,45$$

C. يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "

$$P(C) = \frac{C_{50}^1\times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = \frac{2175}{8216} \approx 0,26$$

D. لا يجيب المترشح على أي موضوع "

$$P(D)=\frac{C_{30}^{3}}{C_{80}^{3}}=\frac{4060}{82160}=\frac{406}{8216}\approx 0,05$$

3. ايجاد عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99 :

نسمي عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها ومنه نحل المتراجحة : $1-\frac{C_{80-x}^{3}}{C_{80}^{3}}\geq 0,99$ أي $\frac{C_{80-x}^{3}}{C_{80}^{3}}\geq 0,01$ أي $C_{80-x}^{3}\geq 821,6$

ونجد : $(80-x)(79-x)(78-x)\succ 4929$

- من أجل $x=61$ نجد : $(80-61)(79-61)(78-61)=5814$
- من أجل $x=62$ نجد : $(80-62)(79-62)(78-62)=4896$
- من أجل $x=61$ نجد : $(80-63)(79-63)(78-63)=4080$

ومنه قيمة هي 62 ونقول على أنه على المترشح أن يدرس على الأقل 62 موضوع لكي يكون إحتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}$

بتوحيد المقامات نجد :

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=1-\frac{1}{2u_n+1}\\&=\frac{2u_n+1-1}{2u_n+1}\\&=\frac{2u_n}{2u_n+1}\end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{u_{n+1}=1-\frac{1}{2u_n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+1}}$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec\frac{1}{2}$

لدينا : $0\prec u_0=\frac{1}{5}\prec\frac{1}{2}$ محققة

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ أي $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ ونبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ أي $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{2}$

لدينا : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ ، نضرب في العدد 2 : $0 \prec 2u_n \prec 1$ ، بإضافة العدد 1 نجد : $1 \prec 2u_n + 1 \prec 2$

نقلب نجد : $1 \succ \frac{1}{2u_n+1} \succ \frac{1}{2}$ ، نضرب في العدد 1- نجد : $-1 \prec -\frac{1}{2u_n+1} \prec -\frac{1}{2}$ ، بإضافة العدد 1 نجد :

$0 \prec 1 - \frac{1}{2u_n+1} \prec \frac{1}{2}$ ومنه : $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{2}$

3) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ، **واستنتاج اتجاه تغير المتتالية** (u_n).

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n+1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$

اتجاه تغير المتتالية : بما أن $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$ عدد موجب ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4) دراسة تقارب (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ- اثبات أن المتتالية (v_n) **هندسية أساسها** $q = 6$.

لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$ ومنه

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 6$.

ب- **كتابة** v_n **بدلالة** n : $v_0 = \frac{u_0}{2u_0 - 1} = -\frac{1}{3}$ ومنه : $v_n = -\frac{6^n}{3}$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

لدينا $u_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ ومنه $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ أي $v_n(2u_n - 1) = 3^n u_n$ أي أن $v_n = u_n(2v_n - 3^n)$

ومنه $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

ومنه بالتعويض نجد :

$$u_n=\frac{\left(-\frac{6^n}{3}\right)}{2\left(-\frac{6^n}{3}\right)-3^n}=\frac{\left(-\frac{6^n}{3}\right)}{\left(-\frac{2\times6^n-3^{n+1}}{3}\right)}=\frac{-6^n}{-2\times6^n-3^{n+1}}=\frac{3^n\times2^n}{2\times3^n\times2^n+3^n\times3}=\frac{\cancel{3^n}\times2^n}{\cancel{3^n}\left(2^{n+1}+3\right)}=\boxed{\frac{2^n}{2^{n+1}+3}}$$

ت- حساب $\lim u_n$ و حساب S_n المجموع بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+........+\frac{1}{u_n}$

لدينا : $\frac{1}{u_n}=\frac{2^{n+1}+3}{2^n}=2+\frac{3}{2^n}$ ومنه $S_n=\left(2+\frac{3}{2^0}\right)+\left(2+\frac{3}{2^1}\right)+\left(2+\frac{3}{2^2}\right)+.......+\left(2+\frac{3}{2^n}\right)$

أي أن : $S_n=2(n+1)+\left(1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}....+\frac{1}{2^n}\right)$ ومنه : $S_n=2(n+1)+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}$

أي أن : $S_n=2(n+1)-2\left[\frac{1}{2^{n+1}}-1\right]$

التمرين الرابع :

i. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-3x-4$

1) دراسة تغيرات الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها :

- النهايات :
$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x-4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$$

- المشتقة : الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $g'(x)=3x^2-3$

$$g'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=\frac{3}{3}$$
$$x^2=1$$
$$x=\sqrt{1}=\left\{\begin{matrix}-1\\+1\end{matrix}\right.$$

ونلخص إشارة المشتقة في الجدول التالي :

x	$-\infty$		1		-1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	

- تشكيل جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

2) التبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \prec \alpha \prec 2,3$

الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $[2;2,3]$ ولدينا : $g(2)=-2$ ، $g(2.3)=1,27$ أي $g(2)\times g(2,3)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \prec \alpha \prec 2,3$.

3) استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نستنتج إشارة $g(x)$ ونوضحها في الجدول الموالى :

x	$-\infty$		-1		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	+	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
اشارة $g(x)$		-	0	+	

ii. f دالة عددية معرفة على $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تعيين الاعداد الحقيقية a و b و c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x من D_f: $f(x)=ax+b\dfrac{cx+d}{x^2-1}$

باستخدام احدى الطرق سواء كانت طريقة المطابقة او القسمة الاقليدية نجد : $g(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$

أي : $\boxed{a=1}$ و $\boxed{b=2}$ و $\boxed{c=1}$ و $\boxed{d=2}$

2) التبيين انه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ ، و استنتاج اتجاه تغير الدالة :

$f'(x)=\dfrac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f'(x)=\dfrac{3x^4+4x^3-3x^2-4x-2x^4-4x^3}{(x^2-1)^2}$

أي أن : $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2-4x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}=\boxed{\dfrac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$ ونلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
اشارة x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
اشارة $g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
اشارة $\dfrac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

متزايدة على المجال $]-\infty;-1[\cap]-1;0]\cap]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[0;1[\cap]1;\alpha]$

3) حساب نهايات الدالة f عند حدود أطراف مجموعة تعريفها المفتوحة واستنتاج معادلات المستقيمات المقاربة .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty} x=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} x=\boxed{+\infty}$$

ومنه $x=-1$ و $x=1$ هما معادلتي المستقيمان المقاربان للمنحنى (C_f) .

4) اثبات ان $(\Delta): y=x+2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) :

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ(C_f)

5) تشكيل جدول تغيرات الدالة f و دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y=x+2$:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$+\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = x + 2$:

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$	|	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)-y$		$-$	|	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

✓ (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين $]-2;-1[$ و $]1;+\infty[$

✓ (C_f) يقع تحت (Δ) على المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-1;1[$